DIRECCION GENERAL DE EDUCACION

TECNOLOGICA INDUSTRIAL

DIRECCION TECNICA

SUBDIRECCION ACADEMICA

DEPARTAMENTO DE PLANES

Y

PROGRAMAS DE ESTUDIO

PENSAMIENTO MATEMATICO III

GUÍA DE ESTUDIO

ARQ. MARTIN CORTES OLVERA.

ING. MAURO

CICLO AGOSTO 2024 – ENERO 2025.

CONTENIDO

INTRODUCCION.

La parte culminante del estudio matemático es el cálculo diferencial e integral, el cuál se utiliza para resolver problemas que no se pueden resolver con las matemáticas básicas. Este ha proporcionado la mayoría de las fórmulas que se utilizan en la física y en la estadística, por ejemplo. Esas fórmulas, que el común de nosotros utilizamos por simple sustitución de datos, son resultado de derivación o integración y que no tenemos que molestarnos en razonar, solamente ocupar. Ejem. Calcular el tamaño de una lata cilíndrica con capacidad de 250 ml que ocupe la menor cantidad de lámina posible. Si puedes observar, aunque tengas varios tipos de latas que tengan una capacidad de 250 ml, no todas tienen la misma cantidad de lámina y con ayuda del cálculo, se puede obtener el tamaño exacto para lograr dicho objetivo.

El cálculo exige el conocimiento de la aritmética, el álgebra, la trigonometría y la geometría, de manera que debemos saber trazar una gráfica o identificarla a simple vista relacionándola con la función que la genera y al revés. En este curso ocuparemos mucho al principio el trazo de gráficas por simple inspección. Después utilizaremos el álgebra en la resolución de límites y derivadas.

En este intento de guía se trabajará mediante actividades programadas por clase, y la intención es que te lleves una idea básica de lo que se puede hacer con el cálculo.

OBJETIVO.

Que tengas una idea general de la aplicación del cálculo para que comprendas el porque éste es útil en la resolución de ciertos problemas.

I. CONCEPTOS BÁSICOS.

CALCULO: es el estudio de los límites entre las variables en una función.

FUNCIÓN: es la relación única entre los elementos no repetitivos de un conjunto A con respecto a los elementos de un conjunto B. Al primer conjunto se llamará variable independiente y al segundo dependiente. Los valores que abarca el conjunto A corresponden al dominio, y los del B a la imagen (rango).

DOMINIO: es el conjunto de los elementos de x (variable independiente) que pueden ser incluidos en la función.

IMAGEN (RANGO): es el conjunto de elementos de y (variable dependiente) correspondientes al dominio que pueden ser incluidos en la función.

INTERVALO: es un rango o espacio determinado que tiene límites cerrados o abiertos.

LIMITE: es el valor que no se puede rebasar pero se puede acercar lo más posible a un punto indicado. El límite más importante del cálculo es donde se puede determinar la pendiente de un punto en una curva mediante una línea tangente.

TANGENTE: es la razón del aumento de la variable dependiente con respecto a la independiente: a esto se le llama incremento.

MÁXIMO: punto o puntos más elevados en una gráfica. Existen máximos relativos y absolutos.

MÍNIMO: punto o puntos más bajos en una gráfica. Existen mínimos relativos y absolutos.

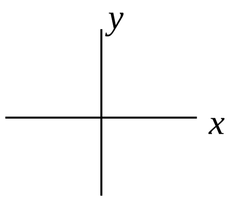
II. FUNCIONES Y SUS GRAFICAS: DOMINIO E IMAGEN. INTERVALOS.

FUNCION: **se dice que una función es aquella relación donde a cada elemento de x le corresponde sólo un elemento de y .**

ACTIVIDAD I.

Investiga como son las funciones siguientes y trázalas; determina el dominio y la imagen de cada una de ellas. Puedes hallar esta información en cualquier libro de cálculo con geometría, en internet o alguna enciclopedia

A. FUNCION CONSTANTE. Tiene como dominio a los reales y su imagen esta formada por la constante *c*.

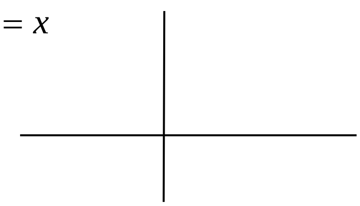


Y = 6

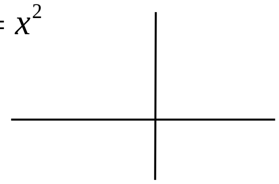
B. FUNCIONES DE POTENCIA.

Realiza las gráficas tomando el intervalo. Determina su dominio e imagen.

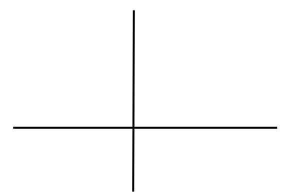
$y = x$



$y = x^2$



$y = x^3$



D= I =

D = I =

D= I =

C. FUNCIONES POLINOMIALES.

Son aquellas que se componen de dos o más términos y cuyas potencias disminuyen.

$y = x^3 - x + 1$ $\qquad\qquad$ $y = x^4 - 3x^2 + x$

D= $\qquad$ I= $\qquad\qquad$ D= $\qquad$ I =

D. FUNCIONES RACIONALES.

Se componen de la división de funciones polinomiales o de raíces de ellas.

$y = \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $y = \sqrt{x}$ $\qquad$ $y = \sqrt[3]{x}$

D= $\qquad$ I= $\qquad$ D= $\qquad$ I= $\qquad$ D= $\qquad$ I=

E. DESPLAZAMIENTOS VERTICALES Y HORIZONTALES.

$y = f(x) \pm c$ la gráfica se desplaza c unidades hacia arriba o hacia abajo.

$y = f(x \pm c)$ la gráfica se desplaza c unidades a la izquierda o derecha.

F. ESTIRAMIENTO Y REFLEXION HORIZONTALES Y VERTICALES.

$y = cf(x)$ la gráfica se comprime c unidades en dirección vertical.

$y = \dfrac{1}{c} f(x)$ la gráfica se comprime c unidades en dirección horizontal.

$y = f(cx)$ la gráfica se comprime c unidades en dirección horizontal.

$y = f(\dfrac{x}{c})$ la gráfica se estira c unidades en dirección horizontal.

$y = -f(x)$ la gráfica se refleja respecto del eje x.

$y = f(-x)$ la gráfica se refleja respecto del eje y.

ACTIVIDAD II. Realizar la gráfica e indicar el dominio y rango de la misma.

1. $y = 4$
2. $x = -3$
3. f(x) = 3

4. $y = x - 4$

5. f(x) = 2x + 4

6. f(x) = - 2x + 2

7. h(x) = - 4x - 2

8. $y = x^2 + 2$

9. $y = 2x^3$

10. $y = \dfrac{1}{x-2}$

11. $y = \dfrac{10}{x}$

12. $y = -\sqrt{x}$

13. $y = \sqrt{-x}$

14.

$$y = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 3 \\ 0 & \text{si } x = 3 \\ -x + 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

III. INTERVALOS Y SUS GRÁFICAS.

ACTIVIDAD III. Para los intervalos siguientes realiza las gráficas.

15. $y = 4$ dominio (-2,6)

16. $x = -3$ 2>x>6

17. f(x) = 3 0>x>6

18. $y = x - 4$ 4>x>8

19. f(x) = 2x + 4 $4 \geq x \geq 8$

20. f(x) = -2x + 2 $-3 \geq x > 8$

21. h(x) = -4x - 2 $4 \geq x\ 8$

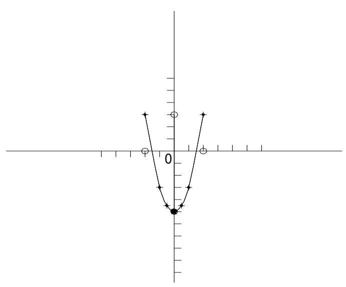
22. $y = x^2 + 2$ dominio [-2,6]

23. $y = 2x^3$ dominio (-2,8]

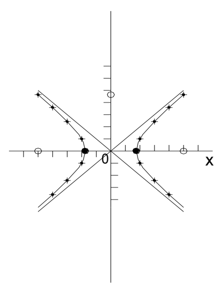
IV. LIMITES DE UNA FUNCION.

Una función es una sucesión de coordenadas de x e y. Los límites de una función en un punto dado pueden tomarse en ambos sentidos de una función, es decir viniendo de izquierda a derecha o de derecha a izquierda. Si existe el límite en ambos sentidos se dice que la función es **continua**, y que existe un límite unilateral.

3.1, 3.12, 3.135, 3.141, 3.1415 $\Rightarrow \pi$ por la izquierda
3.155, 3.152, 3.148, 3.146, 3.1415 $\Rightarrow \pi$ por la derecha



Función contínua



Función discontínua

Tomando como referencia un punto cualquiera en el intervalo de una gráfica, se puede determinar si existe el límite de la función en ese punto. En el caso más sencillo es posible calcular el valor límite de una función, sustituyendo directamente, en la expresión que define, la x por su valor límite, y realizar las operaciones dadas.

ACTIVIDAD IV. Calcula los límites indicados por sustitución simple:

24. $\lim_{x \to 2} x + 3 =$

25. $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 4x + 2}{x - 1} =$

26. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x-3}{x+2} =$

27. $\lim_{x\to 4} 10 =$

28. $\lim_{x\to -1} x^2 - 3x + 2 =$

29. $\lim_{x\to -1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-2} =$

30. $\lim_{x\to 0} x^2 + 3x + 1 =$

31. $\lim_{x\to 45^\circ} senx =$

32. $\lim_{x\to 0} (5x - 4^0) =$

33. $\lim_{x\to 0} \dfrac{4-x}{5+x} =$

En otras ocasiones es necesario realizar algunos procesos algebraicos antes de poder calcular el límite de una función. Estas operaciones pueden incluir elevar a una potencia, factorizar, dividir, etc., para evitar tener cero en el denominador, ya que la división entre cero no existe.

En el caso que el límite de la operación diera cero en el denominador y en el numerador tenemos la forma indeterminada 0/0 = ∝. En estos casos también habrá que realizar las operaciones que nos quiten la indeterminación.

ACTIVIDAD V. Calcula los siguientes límites de la forma indeterminada 0/0:

NOTA: para resolver estos problemas, deberás hacer un recordatorio del algebra elemental, factorización, productos notables, que podrás consultar en cualquier texto de algebra.

34. $\lim_{x\to 0} \dfrac{5x - x^2}{x} =$

35. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} =$

36. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2 - 4} =$

37. $\lim_{x\to 0} 5^x =$

38. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} =$

39. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x-3} =$

40. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} =$

41. $\lim_{x\to a} \dfrac{x^4 - a^4}{x^2 - a^2} =$

42. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(x+2)^3 - 2^3}{x} =$

43. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 + 4x}{x} =$

Cuando una función tiende al infinito $(\lim_{x\to\alpha}) =$ **tanto en el numerador como en el denominador, se tiene la forma indeterminada** $\alpha\,/\,\alpha$. En este caso habrá que dividir cada uno de los elementos entre la variable con el exponente mayor, y hacer las operaciones algebraicas correspondientes.

ACTIVIDAD VI. Resuelve los siguientes límites que presentan la forma indeterminada (<u>$\propto/\propto$</u>):

44. $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{6x+2}{3x+5} =$

45. $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{8x^5 - 3x^2 + 1}{4x^4 + 5x^2 - 7} =$

46. $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{2x^2 + 3}{4 + x - 5x^2} =$

47. $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{4x^3 + 2}{8x^4 - 3} =$

Existen los límites irracionales que constan de una raíz en el numerador o en el denominador. Estos se resuelven multiplicando por el elemento neutro que se forma de tomar la parte que tiene la raíz, cambiando el signo y dividiéndola entre sí misma.

48. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{3+x} - \sqrt{x}}{x} =$

49. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}} =$

50. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2 - \sqrt{x+4}}{x} =$

51. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 9}{\sqrt{x^2+7} - 4} =$

52. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 - 3} - 1} =$

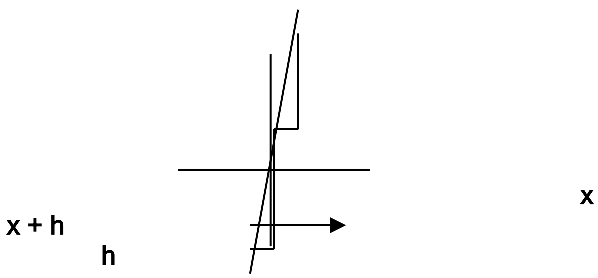
53. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - x^2}{2 - \sqrt{x^2 + 3}} =$

V. RAZON DE CAMBIO: TANGENTE A UNA RECTA.

La pendiente de una recta nos da su inclinación con respecto al eje de las x, pero también nos dice la velocidad de cambio de una variable con respecto a la otra. Pero en una curva esa pendiente va cambiando con la forma de la curva. La pendiente es una línea tangente que va cambiando su inclinación en cada punto de la curva; por lo tanto

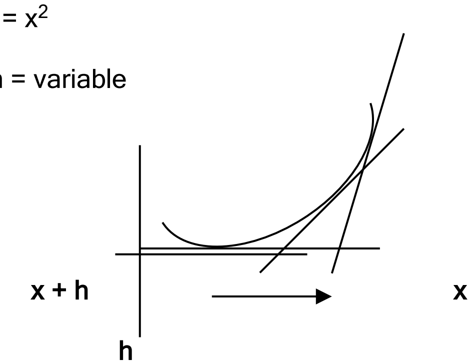
Ej. $y = 2x$

m = 2 constante



$y = x^2$

m = variable



La pendiente en cada punto de la curva es el límite de la función en esos puntos. Podemos suponer que la recta tangente se va desplazando a lo largo de la curva del punto del punto x al punto x + h (ó x + Δx). Esto es desplazar h unidades x para obtener la tangente más adecuada a ese punto de la curva. Si nos desplazamos con incrementos cada vez más pequeños hasta que estos incrementos se acerquen a cero podremos determinar el límite de una función en un punto dado utilizando el método de los incrementos para determinar la función tangente a una curva; es decir, su velocidad de cambio. De nueva cuenta después de establecer el incremento habrá que realizar las operaciones pertinentes.

VI. LA DERIVADA.

El concepto medular del cálculo diferencial es la *derivada*, que es la tasa de cambio o variación de una cantidad respecto a otra. Ya vimos que esa variación está determinada por la tangente en cada punto dado de la función, que es el límite en ese punto. Así la derivada es la pendiente de la curva en el cada punto y se denota y´ o dy/dx.

Existen métodos para calcular la derivada de una función, uno de ellos es el **METODO DE LOS CUATRO PASOS**.

Ejemplo 1:

1. $\frac{d}{dx}c = 0$

2. si $f(x) = x^n,$ **entonces** $f'(x) = nx^{n-1}$

3. si $f(x) = cx,$ **entonces** $f'(x) = cf'x$

4. **si** $f´def(x)f(g)$ **entonces** $f(x)f´(g) + f´(x)f(g)$

5. **si** $f´de\frac{f(x)}{f(g)} = \frac{f(x)f´f(g) - f(g)f´(x)}{f(g)^2}$

6. **si** $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ **entonces** $\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$ **como en el caso de las raíces.**

Las leyes de las derivadas siguen las mismas reglas que las de los límites.

Ejemplo 2:

Ej. $\lim_{h\to 0} x + 3$

1) (x + h) + 3 se incrementa la variable,

2) en su caso se realiza la operación

3. x + h + 3 se resta la función original

$\underline{\text{-x} \quad \text{- 3}}$
h

4) h/h se divide entre el incremento h a cada término

1 es el valor de la tangente o pendiente en el punto dado

ACTIVIDAD VI. Determinar la derivada de las siguientes funciones utilizando el método por medio del limite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$$

54. $f(x) = mx^2$

55. $f(x) = 5x^3$

56 $f(x) = 2x^2 + 7x - 1$

57 $f(x) = x^3 + 5x - 3$

ACTIVIDAD VII. Deriva las siguientes funciones aplicando las reglas anteriores o las fórmulas de derivación:

58. $y = 6x - 3$

59. $f(x) = 3x^2 - x + 2$

60. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

61. $y = \sqrt{x^2 - 1}$

62 $y = \frac{x+3}{3x-2}$

63. $y = x^3 + 3x^2 - x + 2$

64. $y = \frac{x^2+3}{x-2}$

65. $y = x^{2/3}$

66. $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$

67. $y = (5x^2 - 3x - 1)^3$